www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

E.N.S. de LYON
Opt.Sc.Nat.-

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Les parties I A, I B et II seront traitées sur des feuilles séparées. On notera que les parties I A et I B sont largement indépendantes .

PARTIE I

Dans le plan euclidien, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, deux points M et N sont en mouvement. A l'instant $t = 0$, le point M possède une abscisse a strictement positive et une ordonnée b quelconque, tandis que le point N se trouve en O. A tout instant t, le vecteur vitesse $\vec{v_1}$ de M, de norme constante et non nulle v_1, a même direction et même sens que le vecteur $\overrightarrow{MN}$; le vecteur vitesse $\vec{v_2}$ de N, de norme constante et non nulle v_2, est constamment égal à $v_2\vec{j}$.

On notera x et y les coordonnées du point M, θ l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{NM})$ et γ le rapport v_2 / v_1.

A - On s'intéresse à la courbe décrite par le point M à partir de l'instant $t = 0$ et tant que l'abscisse x de M demeure strictement positive. Cette trajectoire porte le nom de "courbe du chien", M représentant la position du chien, N représentant la position du maître .

1°- a) Exprimer $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ en fonction de v_1 et θ.

b) Exprimer $\frac{dy}{dt}$ en fonction de $\frac{dx}{dt}$ et θ, en déduire $\frac{dy}{dx}$.

2°- a) Quelles sont les coordonnées de N à l'instant t ?

b) Exprimer y en fonction de x, v_2, t et θ.

3°- a) Montrer que l'on a : $\frac{\gamma}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{d\theta}{dt}$.

b) En déduire l'expression $x^{\gamma} = C\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^{1/2}$, où $C = a^{\gamma-1}\left(\sqrt{a^2+b^2} - b\right)$.

4°- a) Exprimer $\sin\theta$, puis $\tan\theta$, en fonction de x, γ et C.

b) Montrer que, pour $\gamma \neq 1$, la trajectoire de M est la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\frac{x^{1+\gamma}}{1+\gamma} - C\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) + K \quad , \text{ où } K = \frac{\gamma}{1-\gamma^2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - \gamma b\right).$$

c) Déterminer l'équation de la trajectoire de M pour $\gamma = 1$.

5°- a) Donner l'allure des trajectoires de M, pour $0 < x \leq a$, selon les valeurs de γ et le signe de b.

b) Etudier les limites de x et de y lorsque $t \to +\infty$ dans le cas où $\gamma \geq 1$.

c) Dans le cas où $\gamma < 1$, montrer que x s'annule à un instant t_0 fini, que M et N se rejoignent au point $(0, v_2 t_0)$ et que $t_0 = K / v_2$.

B - Pour tenir compte du fait que la position du chien à l'instant $t = 0$ peut varier d'une promenade à l'autre, on associe à cette position un couple (A, B) de variables aléatoires à valeurs réelles qui représentent les coordonnées initiales possibles du point M.

On admet que ce couple (A, B) a une densité de probabilité f définie par :

$$\begin{cases} f(a,b) = \dfrac{\lambda}{(1+a^2+b^2)^2}, & \text{pour } a > 0, \ \forall\, b, \\ f(a,b) = 0, & \text{pour } a \leq 0, \ \forall\, b, \end{cases}$$

et où λ est une constante réelle.

1°- Calculer λ.

2°- Déterminer la densité de probabilité de A, puis celle de B; ces variables sont-elles indépendantes ?

3°- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = \sqrt{A^2+B^2}$.

4°- Il résulte de la partie A que, dans le cas où $\gamma < 1$, l'instant de la rencontre entre M et N est une variable aléatoire T qui dépend du couple (A, B).
Calculer, en fonction de γ et de v_2, l'espérance de T.

PARTIE II

On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X, à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$D(P)(X) = \frac{P(X) - P(a)}{X - a}.$$

1°- Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2°- Déterminer Ker D, Im D et Ker D $\cap$ Im D.

3°- Construire une base $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :
- $D(Q_0)$ est le polynôme nul.
- $Q_0(a) = 1$.
- $D(Q_i) = Q_{i-1}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $Q_i(a) = 0$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ecrire la matrice de D par rapport à cette base.

4°- On pose $D^1 = D$ et, pour $i \geq 2$, $D^i = D \circ D^{i-1}$.

a) Déterminer Ker D^i, Im D^i et Ker $D^i \cap$ Im D^i.

b) Calculer, pour $i \geq 1$ et pour $0 \leq p \leq n$, $D^i(Q_p)$.

5°- Soit $P = \alpha_0 Q_0 + \ldots + \alpha_n Q_n$ la décomposition de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base $\{Q_0, \ldots, Q_n\}$. Exprimer les coordonnées $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de P à l'aide de P et des polynômes $D^i(P)$, pour $i \geq 1$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail